数学

【出題の意図】

〔Ｉ〕工学的に重要な直交対角化を題材に，理解力，表記力，計算力を問う問題である．(1)および(2)では固有値問題の標準的な解法手順を一通り実行できるか，(3)では対称行列の直交変換による対角化の意義を理解しているかを評価する．

〔II〕工学的に重要なラグランジュ乗数法を題材に，理解力，構成力，計算力を問う問題である．(1)では単なる2変数ではなく，3変数に拡張された最適化問題を正しく処理できるか，(2)では偏微分方程式を導出・整理し，代数的に連立方程式を解けるか，(3)ではラグランジュ乗数によって生じる代入関係を用い，1変数に帰着して解けるかを評価する．

【解答例】

〔Ⅰ〕

（１）求める固有値を λ とおく．固有多項式は

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ -3 & \lambda-4 & -3 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

であるから，固有方程式を解いて，$\lambda = -1,\ 3,\ 4$.

（２）求める固有ベクトルを $(x_1\quad x_2\quad x_3)^{\top}$ とおく．

（ｉ）$\lambda=-1$のとき

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -3 & -5 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cを任意の実数とし，$x_3=c$とおくと，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表せる．

（ii）$\lambda=3$のとき

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cを任意の実数とし，$x_3=c$とおくと，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表せる．

（iii）$\lambda=4$のとき

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cを任意の実数とし，$x_2=c$とおくと，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表せる．

（ｉ）～（iii）より，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

（３）（２）で求めた各固有ベクトルを単位化して並べて，

$$P = \frac{1}{\sqrt{38}}\begin{bmatrix} -\sqrt{19} & 1 & 0 \\ 0 & -6 & \sqrt{38} \\ \sqrt{19} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

〔Ⅱ〕

（１）制約条件より

$$g(x,y,z)=x+y+z-1=0$$

よって，ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=x^2+2y^2+3z^2-\lambda(x+y+z-1)$$

（２）

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=2x-\lambda=0\ \cdots\ ①$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=4y-\lambda=0\ \cdots\ ②$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}=6z-\lambda=0\ \cdots\ ③$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=-(x+y+z-1)=0\ \cdots\ ④$$

（３）①〜④を解いて，

$$(x,y,z)=\left(\frac{6}{11},\frac{3}{11},\frac{2}{11}\right)$$

であるから，

$$f(x,y,z)=\frac{66}{121}$$

電気・電子回路　模範解答・出題の意図

解答用紙　2026年度大学院入試　工学研究科＜電気電子工学専攻＞修士課程（前期日程）

一般選抜【専門科目】②

出題の意図
電気電子工学分野における基礎的な「電気回路」および「電子回路」について、基本的な回路構成を説明できるとともに、回路動作を論理的に導出できるかどうかを問う問題である。

〔Ⅰ〕（計４０点）

(1) 時刻$t=0$でスイッチを閉じる直前は電流が流れないので $i(-0)=0$ 　５点

スイッチを閉じた直後はコンデンサが短絡除去されたと考えるため $i(+0)=\frac{v_1-v_2}{R}$ 　５点

(2) 時間領域での回路方程式は、

$$i(t)=\frac{v_1(t)-v_2(t)}{R}、\qquad i(t)=-C_1\frac{dv_1(t)}{dt}=C_2\frac{dv_2(t)}{dt}$$

となる。ここで負号はコンデンサから流れ出る電流の向きを表す。
これより$i(t)$に関する微分方程式は、

$$\frac{di(t)}{dt}=-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)i(t)=-\frac{1}{RC}i(t)、（ただし、\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}、または\ C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}）$$

となる。定常解は０であり、その過渡解を求めると

$$i(t)=Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

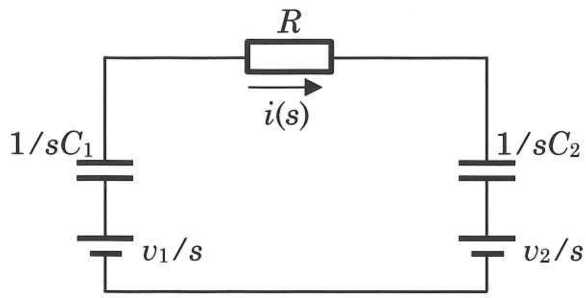
となる。ここで、$t=0$における初期条件より、$i(+0)=A=\frac{v_1-v_2}{R}$を得る。したがって、

$$i(t)=\frac{v_1-v_2}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}=\frac{v_1-v_2}{R}e^{-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t}$$

２０点（導出過程を含む）

となる。

（参考）ラプラス変換を用いて解くときのラプラス等価回路は次の通りである。



これより回路を流れる電流$I(s)$は、

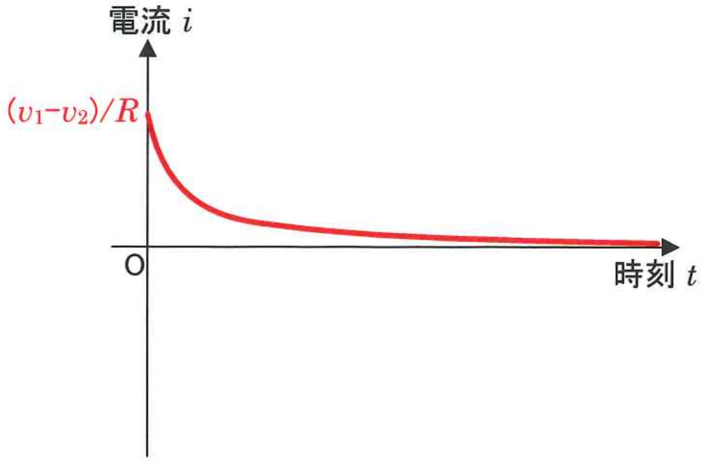
$$I(s)=\frac{v_1/s-v_2/s}{R+1/sC_1+1/sC_2}=\frac{v_1-v_2}{R}\ \frac{1}{s+1/RC}\qquad（ただし、\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}、または\ C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}）$$

となる。これを逆ラプラス変換することにより、

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}=\frac{v_1-v_2}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}=\frac{v_1-v_2}{R}e^{-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t}$$

を得る。

(3) 時刻$t=0$以降の電流$i(t)$の応答波形は次の通りである。



１０点

〔Ⅱ〕(計３０点)

(1) キルヒホッフの電圧則から

$$v(x,t)-v(x+\Delta x,t)=R\Delta x i(x,t)+L\Delta x\frac{di(x,t)}{dt}$$ A ３点

と書ける。これを整理すると、

$$-\frac{v(x+\Delta x,t)-v(x,t)}{\Delta x}=Ri(x,t)+L\frac{di(x,t)}{dt}$$ B ３点

となる。ここで、$\Delta x\to 0$ の極限をとると、

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=Ri+L\frac{\partial i}{\partial t}$$ C ３点 ・・・(式 a)

という偏微分方程式を得る。
これは、線路における電圧の空間的な変化は、抵抗による電圧降下とインダクタンスによる電位差からなることを表している。

(2) 同様に、キルヒホッフの電流則から、

$$i(x,t)-i(x+\Delta x,t)=G\Delta x v(x+\Delta x,t)+C\Delta x\frac{dv(x+\Delta x,t)}{dt}$$ D ３点

と書ける。これを整理すると、

$$-\frac{i(x+\Delta x,t)-i(x,t)}{\Delta x}=Gv(x+\Delta x,t)+C\frac{dv(x+\Delta x,t)}{dt}$$ E ３点

となる。ここで、$\Delta x\to 0$ の極限をとると、

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=Gv+C\frac{\partial v}{\partial t}$$ F ３点 ・・・(式 b)

という偏微分方程式を得る。

これは、線路における電流の空間的な変化は、コンダクタンスによる漏れ電流とコンデンサによる充電電流（変位電流）からなることを表している。

(3) これらの２つの偏微分方程式から、（式 a）を偏微分し、（式 b）を代入して電流iを消去すると、電圧vだけで表される次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -R\frac{\partial i}{\partial x} + L\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} \\
&= R\left(Gv + C\frac{\partial v}{\partial t}\right) + L\left(G\frac{\partial v}{\partial t} + C\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) \\
&= LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (GL + RC)\frac{\partial v}{\partial t} + RGv
\end{aligned}
$$

G　３点　・・・（式 c）

(4) 同様に、電圧vを消去すると、前式と同様の形の電流iだけの次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (GL + RC)\frac{\partial i}{\partial t} + RGi$$

H　３点

(5) ここで、（式 c）について分布定数線路が無損失であることを想定して$R = G = 0$とすると、電圧や電流の波が伝搬する現象を表す次の波動方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

I　３点

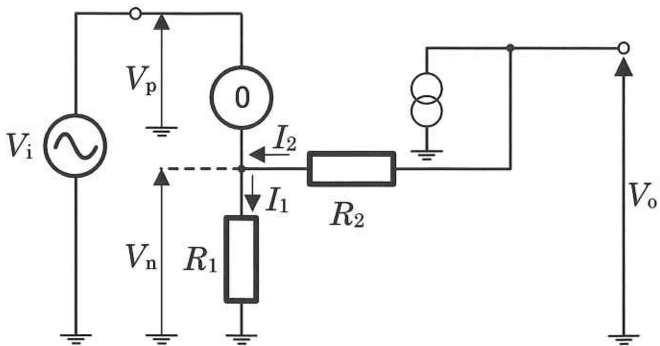
(6) また、$L = G = 0$とすると、右辺が時間の１階微分の方程式となり、熱の拡散現象などを表す拡散方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RC\frac{\partial v}{\partial t}$$

J　３点

〔Ⅲ〕（計３０点）

(1) 正相演算増幅回路のナレータ・ノレータモデル（イマジナリーショート）による等価回路は次のようになる。



$I_1 = I_2$、$V_n = V_p = V_i$であることから、

$$
\begin{aligned}
V_o &= V_n + R_2 I_2 \\
&= V_n + R_2\frac{V_n}{R_1} \\
&= \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)V_i
\end{aligned}
$$

１０点（導出過程を含む）

(2) 増幅回路の電圧増幅率

$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

１０点

(3) ボルテージフォロワ回路の増幅率

増幅回路について、$R_1 = \infty$、$R_2 = 0$とするとボルテージフォロワ回路になる。

増幅率は$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 1$となる。

１０点

電磁気学

＜出題の意図＞

電荷の基本的な概念や法則を理解しているかを確認し，電磁気学の理論を実際の問題に適用する能力を評価する．また，誘電体の特性やその電場に与える影響を理解しているかを確認し，誘電率，分極，電場の変化に対する応答を適切に解析できる能力や理論と実践を結びつける力を評価する問題である．

〔Ⅰ〕

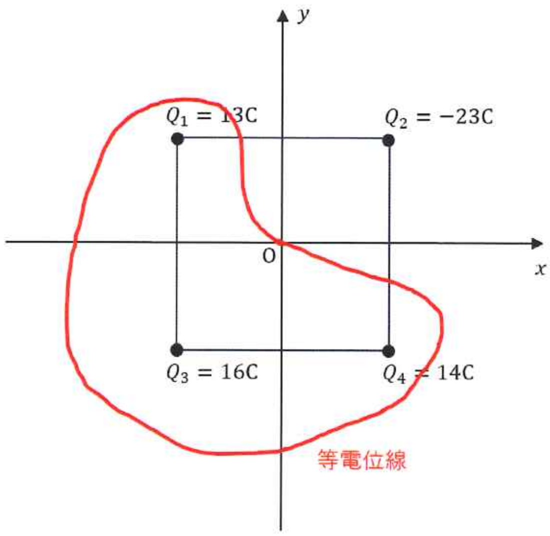
(a) (解) 複数個の点電荷がある場合の電位は，各電荷による電位の和によって与えられる．各点電荷から正方形の中心Oまでの距離をR_1, R_2, R_3, R_4[m]とすると，中心Oの電位Vは次のように求められる．

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3} + \frac{Q_4}{R_4}\right)$$

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$より，

$$V = \frac{1}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \times \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 5.0 \times 10^{8}}(13 - 23 + 16 + 14)$$
$$= 8.99 \times 10^{9} \times 2\sqrt{2} \times 10^{-9} \times 20$$
$$= 508.55\ \mathrm{V} \fallingdotseq 509\ \mathrm{V}$$

(b) (解) 中心Oを通る等電位線に囲まれる点電荷は、Q_1, Q_3, Q_4である.
中心Oを通る等電位線の概略図は次のようになる。



〔II〕

(a) (解) 極板間にV[V]の電位差があり、極板間の距離つまり誘電体の厚さは両誘電体とも同じd[m]であるから、どちらの誘電体内部の電界E_1, E_2も等しく、次のように求められる。

$$E_1 = E_2 = E = \frac{V}{d} \quad [\mathrm{V/m}]$$

したがって、各誘電体の電束密度、分極、静電エネルギー密度は次のように求められる。

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_1 \frac{V}{d} \quad [\mathrm{C/m^2}]$$

$$P_1 = D_1 - \varepsilon_0 E_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V}{d} \quad [\mathrm{C/m^2}]$$

$$D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \varepsilon_2 \frac{V}{d} \quad [\mathrm{C/m^2}]$$

$$P_2 = D_2 - \varepsilon_0 E_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{V}{d} \quad [\mathrm{C/m^2}]$$

(b) (解) 各誘電体内部の静電エネルギー密度は次のように求められる。

$$w_1 = \frac{1}{2} E_1 D_1 = \varepsilon_1 \frac{V^2}{2d^2} \quad [\mathrm{J/m^3}]$$

$$w_2 = \frac{1}{2} E_2 D_2 = \varepsilon_2 \frac{V^2}{2d^2} \quad [\mathrm{J/m^3}]$$

平行平板電極間に蓄えられるエネルギーは、それぞれの静電エネルギー密度を体積積分することで求められる。

$$W_1 = \int_v w_1 dv = \varepsilon_1 \frac{V^2}{2d^2} S_1 d \quad [\mathrm{J}]$$

$$W_2 = \int_v w_2 dv = \varepsilon_2 \frac{V^2}{2d^2} (S - S_1) d \quad [\mathrm{J}]$$

$$W = W_1 + W_2 = \varepsilon_1 \frac{V^2}{2d^2} S_1 d + \varepsilon_2 \frac{V^2}{2d^2}(S - S_1)d = \frac{V^2}{2d}\{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 (S - S_1)\} \quad [\mathrm{J}]$$

もしくは、電極間の静電容量を求め、$W = (1/2)CV^2$ [J]の式から算出しても同様の結果となる。

(c) (解) 誘電率がε_1、ε_2の誘電体に接する極板の表面電荷密度をそれぞれσ_1、σ_2とすると、

$$\sigma_1 = D_1 = \varepsilon_1 \frac{V}{d}$$

$$\sigma_2 = D_2 = \varepsilon_2 \frac{V}{d}$$

となるので、極板表面の全電荷Qは

$$Q = \sigma_1 \frac{S}{2} + \sigma_2 \frac{S}{2} = \left(\varepsilon_1 \frac{V}{d} + \varepsilon_2 \frac{V}{d}\right) \frac{S}{2} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)SV}{2d} \quad [\mathrm{C}]$$

となり、静電容量Cは次のように求まる。

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)S}{2d} \quad [\mathrm{F}]$$

したがって、式を変形すると、

$$C = \varepsilon_1 \frac{S/2}{d} + \varepsilon_2 \frac{S/2}{d}$$

となり、これは、$C_1 = \varepsilon_1 \frac{S/2}{d}$と$C_2 = \varepsilon_2 \frac{S/2}{d}$の容量を持つ、面積が$S/2$の２つのコンデンサを並列に接続した場合の合成容量に等しい。